التمرين الأول:(3 نقط)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $a_n = \underbrace{333.......31}_{n \text{ مرة}}$ (n مرة الرقم 3)

1- تحقق أن العددين a_1 و a_2 أوليان. 0.5

2- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$ 0.5

3- بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7 \quad [31]$ 0.75

4- بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $3a_{30k+1} \equiv 0 \quad [31]$ ، ثم استنتج أن 31 يقسم a_{30k+1} 0.75

5- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$، إذا كان $n \equiv 1 \quad [30]$ فإن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ 0.5

التمرين الثاني:(3.5 نقطة)

حلقة كاملة

نذكر أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي و أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لكل a و b من $\mathbb{R}$ نضع: $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ ونعتبر المجموعة : $E = \left\{ M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$. 0.5

2- احسب $J^2 = J \times J$ حيث: $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ثم استنتج أن E جزء غير مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ 0.75

3- نعرف على $M_2(\mathbb{R})$ قانون التركيب الداخلي $*$ بما يلي : $A * B = A \times N \times B$ حيث : $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ونعتبر التطبيق φ من $\mathbb{C}^*$ نحو $M_2(\mathbb{R})$ الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a + ib$ (a و b عددان حقيقيان) بالمصفوفة $M(a,b)$.

$\mathbb{C}^* \to M_2(\mathbb{R})$
$a+ib \to M(a,b)$

أ) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}),*)$ 0.5

ب) نضع: $E^* = E - \{O\}$. بين أن: $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ 0.25

ج) بين أن $(E^*,*)$ زمرة تبادلية. 0.5

4- بين أن: $A * (B + C) = A * B + A * C \quad (\forall (A,B,C) \in E^3)$ 0.5

5- استنتج مما سبق أن $(E,+,*)$ جسم تبادلي. 0.5

التمرين الثالث:(3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث: $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]-\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

1- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(E)\quad z^2-\sqrt{2}e^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0$

أ)تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $\Delta=\left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^2$ 0.25

ب) اكتب على الشكل المثلثي z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{C}$. 0.75

2- نعتبر النقط I و J و T_1 و T_2 و A التي ألحاقها على التوالي 1 و -1 و $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ و $e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ و $\sqrt{2}e^{i\theta}$

أ) بين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعامدان . 0.5

ب)ليكن K منتصف القطعة $[T_1T_2]$. بين أن النقط O و K و A مستقيمية. 0.25

ج)استنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$. 0.25

3- ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ)اعط الصيغة العقدية للدوران r. 0.25

ب)تحقق أن لحق النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو: $b=\sqrt{2}e^{i\theta}+i$ 0.5

ج)بين أن المستقيمين (IJ) و (AB) متعامدان . 0.25

4- حدد لحق النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة التي متجهتها $(-\vec{v})$ 0.25

5- بين أن النقطة A هي منتصف القطعة $[BC]$. 0.25

التمرين الرابع: (8 نقط)

I - نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x\ln x}{1+x^2}\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1- أ)بين أن الدالة f متصلة على المجال $[0,+\infty[$ 0.5

ب)أدرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0,+\infty[$ 0.25

2- أ)بين أن: $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)\qquad(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$ 0.25

ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ 0.25

ج) بين أن: $f'(\alpha)=0$ $\left(\exists \alpha \in]0,1[\right)$	0.5
د)استنتج أن: $f'\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=0$	0.5
II - نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$	
ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم.	
1- أ)تحقق أن: $\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{t^2}{1+t^2}\leq 1$ $\left(\forall t\in[1,+\infty[\right)$	0.5
ب)بين أن: $F(1)-\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\leq F(x)\leq F(1)-\dfrac{1}{4}(\ln x)^2$ $\left(\forall x\in[1,+\infty[\right)$ (لاحظ أن: $F(x)=\int_0^1 f(t)dt - \int_1^x \dfrac{t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{\ln t}{t}dt$)	1
ج) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.	1
2- أ)بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$	0.5
ب)أدرس تغيرات الدالة F على المجال $[0,+\infty[$	0.25
III-1- أ) بين أن : $-t\ln t\leq\dfrac{1}{e}$ $\left(\forall t\in]0,+\infty[\right)$	0.5
ب)بين أن : $f(t)\leq\dfrac{1}{e}$ $\left(\forall t\in[0,+\infty[\right)$	0.25
ج)استنتج أن: $F(x)<x$ $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right)$	0.25
2- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0\in]0,1[$ و $u_{n+1}=F(u_n)$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$	
أ) بين أن: $u_n\in]0,1[$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$	0.5
ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة .	0.5
ج) حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$	0.5

التمرين الخامس:(2 نقط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \; ; \; x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

0.5	1- بين أن الدالة g متصلة على المجال $[0,+\infty[$
	2- لكل عدد حقيقي x من المجال $[0,+\infty[$ ، نضع $L(x)=\int_0^x g(t)dt$
0.25	أ)بين أن الدالة L متصلة على المجال $[0,+\infty[$
0.25	ب)أحسب $L(x)$ من أجل $x>0$
0.5	ج)أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x)$ ثم استنتج قيمة $L(0)$
	3- لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 نضع: $s_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{p=n-1} g\left(\dfrac{p}{n}\right)$.
0.5	بين أن المتتالية $(s_n)_{n\geq 1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها.

انتهى

Portail des métiers de l'avenir