المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2017

- الموضوع -

NS 22

★★

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها	المعامل	7

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي:

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	حساب الاحتمالات	3 نقط
التمرين الثالث	الأعداد العقدية	3 نقط
المسألة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل و المتتاليات العددية	11 نقطة

- بالنسبة للمسألة ، $\ln$ يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري.

التمرين الأول : (3 نقط)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، المستوى (P) المار من النقطة $A(0\ ,\ 1\ ,\ 1)$ و $\vec{u}(1\ ,\ 0\ ,\ -1)$ متجهة منظمية عليه و الفلكة (S) التي مركزها النقطة $\Omega\left(0\ ,\ 1\ ,\ -1\right)$ و شعاعها $\sqrt{2}$

1) أ- بين أن $x - z + 1 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) — 0.5

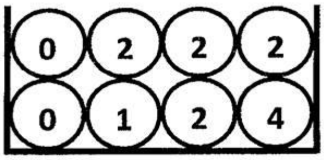
ب- بين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) و تحقق من أن $B(-1\ ,1\ ,0)$ هي نقطة التماس. — 0.75

2) أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة A و العمودي على المستوى (P) — 0.25

ب- بين أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C\left(1\ ,\ 1\ ,\ 0\right)$ — 0.75

3) بين أن $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB} = 2\vec{k}$ و استنتج مساحة المثلث OCB — 0.75

التمرين الثاني : (3 نقط)



يحتوي صندوق على ثماني كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس و تحمل كل واحدة منها عددا كما هو مبين في الشكل جانبه.

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1) نعتبر الحدث A : " من بين الكرات الثلاث المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل العدد 0 ". — 1.5

و الحدث B : " جداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 8 ".

بين أن $p(A) = \dfrac{5}{14}$ و أن $p(B) = \dfrac{1}{7}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة.

أ- بين أن $p(X=16) = \dfrac{3}{28}$ — 0.5

ب- الجدول جانبه يتعلق بقانون احتمال المتغير العشوائي X — 1

أتمم ملء الجدول بعد نقله على ورقة تحريرك معللا أجوبتك.

x_i	0	4	8	16
$p(X=x_i)$				$\dfrac{3}{28}$

التمرين الثالث : (3 نقط)

نعتبر العددين العقديين a و b بحيث $a = \sqrt{3} + i$ و $b = \sqrt{3} - 1 + \left(\sqrt{3} + 1\right)i$

1) أ- تحقق من أن $b = \left(1 + i\right)a$ — 0.25

ب- استنتج أن $\left|b\right| = 2\sqrt{2}$ و أن $\arg b \equiv \dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$ — 0.5

ج- استنتج مما سبق أن $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ — 0.5

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما a و b و النقطة C التي لحقها c بحيث $c = -1 + i\sqrt{3}$

أ- تحقق من أن $c = ia$ و استنتج أن $OA = OC$ و أن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ — 0.75

ب- بين أن النقطة B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$ — 0.5

ج- استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع . — 0.5

المسألة : (11 نقطة)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$

0.25 **1)** تحقق من أن $g(1)=0$

1 **2)** انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g جانبه :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

بين أن $g(x)\le 0$ لكل x من المجال $]0\,,1]$

و أن $g(x)\ge 0$ لكل x من المجال $[1\,,+\infty[$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة : $1\ cm$)

0.5 **1)** بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ و أول هندسيا النتيجة.

0.25 **2)** أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0.75 ب- بين أن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$

1 **3)** أ- بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

0.75 ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0\,,1]$ و تزايدية على المجال $[1\,,+\infty[$

0.25 ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$

0.5 **4)** أ- حل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة $\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x=0$

0.5 ب- استنتج أن المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين يتم تحديد زوج إحداثيتي كل منهما.

0.75 ج- بين أن $f(x)\le x$ لكل x من المجال $[1\,,2]$ واستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D) على $[1\,,2]$

1 **5)** أنشئ ، في نفس المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، المستقيم (D) و المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها محصور بين $2,4$ و $2,5$)

0.5 **6)** أ- بين أن $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$

0.25 ب- بين أن الدالة $H:x\mapsto 2\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto \frac{2}{x}-1$ على المجال $]0,+\infty[$

0.5 ج- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\int_1^2\left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x\,dx=(1-\ln 2)^2$

0.5 د- احسب ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$

III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=\sqrt{3}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

0.5 **1)** بين بالترجع أن $1\le u_n\le 2$ لكل n من $\mathbb{N}$

0.5 **2)** بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكنك استعمال نتيجة السؤال II) 4) ج-)

0.75 **3)** استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

التمرين الأول :

1) أ - طريقة 1 :

لدينا (P) مستوى ومنه معادلته الديكارتية تكتب على شكل :

$$(P) : ax + by + cz + d = 0$$

بما أن $\vec{u}(1,0,-1)$ منظامية عليه فإن :

$a = 1$ و $b = 0$ و $c = -1$

ومنه $(P) : x - z + d = 0$

وبما أن $A(0,1,1)$ نقطة من المستوى (P) فإن

$$x_A - z_A + d = 0$$

$$\Leftrightarrow (0) - (1) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = 1$$

ومنه $\boxed{(P) : x - z + 1}$

طريقة 2 :

لدينا (P) مستوى يمر من A و $\vec{u}$ منظامية عليه ومنه .

$$\forall M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (P)$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - z + 1 = 0$$

ومنه

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (P) \Leftrightarrow \boxed{x - z + 1 = 0}$$

ب - لنحدد المسافة بين المستوى (P) و Ω مركز الفلكة (S) .

لدينا .

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|x_\Omega - z_\Omega + 1|}{\sqrt{(1)^2+(0)^2+(-1)^2}}$$

$$= \frac{|(0) - (-1) + 1|}{\sqrt{1+0+1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R$$

ومنه المستوى (P) مماس للفلكة (S)

- لنتحقق أن $B(-1,1,0)$ هي نقطة التماس .

لدينا : $B \in (P)$ لأن

$$x_B - z_B + 1 = (-1) - (0) + 1 = 0 \checkmark$$

لدينا : $B \in (S)$ لأن

$$\vec{\Omega B}\begin{pmatrix} -1-0 \\ 1-1 \\ 0+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{\Omega B}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$\Omega B = \|\vec{\Omega B}\|$$

$$= \sqrt{x_{\vec{\Omega B}}^2 + y_{\vec{\Omega B}}^2 + z_{\vec{\Omega B}}^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{2} = R$$

ومنه :

المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة $B\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ لأن

B تحقق المعادلة الديكارتية ل (P)

و المسافة بين B و مركز الفلكة (S)

تساوي الشعاع

2) أ- وبما أن (D) عمودي على (P)

- $\vec{u}$ منظمية على (P)

فإن المتجهة $\vec{u}$ موجهة لـ (D)

وبما أن A تنتمي إلى (D) فإن

$$\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (D)$$

$$\vec{AM} = t \times \vec{u} \qquad t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = t \times x_{\vec{u}} \\ y - y_A = t \times y_{\vec{u}} \\ z - z_A = t \times z_{\vec{u}} \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\, x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t\, y_{\vec{u}} \\ z = z_A + t\, z_{\vec{u}} \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + t\,(1) \\ y = 1 + t\,(0) \\ z = 1 + t\,(-1) \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

ومنه:

$$\boxed{(D): \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}}$$

ب) 4b-

لكي نبين أن (D) مماس لـ (S)

يجب حساب مسافة Ω عن (D).

• لدينا:

$$d(\Omega,(D)) = \frac{\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

ولدينا:

$$\vec{\Omega A}\begin{pmatrix}0-0\\1-1\\1+1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{\Omega A}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\vec{\Omega A} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \vec{i} \\ 0 & 0 & \vec{j} \\ 2 & -1 & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$= 2\vec{j}$$

ومنه:

$$\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \|2\vec{j}\| = 2$$

وأيضا:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(1)^2+(0)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

ومنه:

$$d(\Omega,(D)) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R$$

ومنه (D) مماس لـ (S)

• لنتحقق أن نقطة التماس هي $C(1,1,0)$

لدينا:

$$\Omega C = \sqrt{(x_C - x_\Omega)^2 + (y_C - y_\Omega)^2 + (z_C - z_\Omega)^2}$$

$$= \sqrt{(1-0)^2 + (1-1)^2 + (0+1)^2}$$

$$= \sqrt{2} = R$$

ومنه $\boxed{C \in (S)}$

لدينا:

$$\begin{cases} x_C = t \\ y_C = 1 \\ z_C = 1 - t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = t \\ 1 = 1 \\ 0 = 1 - t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = 1$$

ومنه: $\boxed{C \in (D)}$

إذن:

(D) مماس لـ (S) في النقطة C

ملاحظة:

هذه المنهجية في الجواب صحيحة

لكن طويلة مقارنة مع 0,75

2b :

• لنعتبر $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ نقطة الفضاء بحيث

$$M \in (\Delta) \cap (S')$$

ومنه :

- M تحقق التمثيل البارامتري لـ (Δ)
- M ،، المعادلة الديكارتية للفلكة (S')

• لدينا : معادلة الفلكة هي :

$$M \in (S')$$
$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = R^2$$
$$\Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2 = R^2$$
$$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2+(z-(-1))^2 = \sqrt{2}^2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x^2+(y-1)^2+(z+1)^2 = 2}$$

ومنه

$$M \in (\Delta) \cap (S')$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) & x = t \\ (2) & y = 1 \\ (3) & z = 1-t \\ (4) & x^2+(y-1)^2+(z+1)^2 = 2 \end{cases}$$

ومنه بتعويض ① و ② و ③ في المعادلة ④ فإن

$$t^2+(1-1)^2+(1-t+1)^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow t^2+(2-t)^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow t^2+4-4t+t^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow 2t^2-4t+2 = 0$$
$$\Leftrightarrow t^2-2t+1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow t-1 = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 1$$

نعوض قيمة t في تمثيل (Δ)

ومنه :

$$\begin{cases} x_M = (1) = 1 \\ y_M = 1 = 1 \\ z_M = 1-(1) = 0 \end{cases}$$

ومنه

$C(1,1,0)$ هي نقطة التماس من (Δ) و (S')

3) لدينا :

$$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

ومنه :

$$\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \vec{i} \\ 1 & 1 & \vec{j} \\ 0 & 0 & \vec{k} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= 0\vec{i} - 0\vec{j} + 2\vec{k}$$
$$= 2\vec{k}$$

ومنه :

$$\boxed{\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB} = 2\vec{k}}$$

• لدينا حسب خاصية الدرس

مساحة المثلث OCB هي

$$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}\|$$
$$= \frac{1}{2}\|2\vec{k}\|$$
$$= \frac{1}{2}\times 2$$

إذن :

$$\boxed{S = 1 \times (\text{وحدة المساحة})}$$

JAMATH

التمرين الثاني :

1) • بما أن السحب يتم بشكل عشوائي وفي آن واحد فإن :

$$\text{card}(\Omega) = C_8^3$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{card}(\Omega) = 56}$$

• A : « لا توجد كرة تحمل 0 »

« 3 كرات لا تحمل العدد 0 »

ومنه :

$$A : (3 \times \overline{0})$$

أي

$$A : (\overline{0} \text{ و } \overline{0} \text{ و } \overline{0})$$

ومنه :

$$\text{card}(A) = C_6^3$$

$$\Leftrightarrow \text{card}(A) = 20$$

إذن :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(A) = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}}$$

• B : « جداء الأعداد هو 8 »

الحالات الممكنة هي :

$$B : (4 \text{ و } 2 \text{ و } 1) \text{ أو } (2 \text{ و } 2 \text{ و } 2)$$

ومنه :

$$\text{card}(B) = C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1 + C_4^3$$

$$\Leftrightarrow \text{card}(B) = 4 + 4 = 8$$

ومنه :

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(B) = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}}$$

2) أ- لدينا : $P[X=16]$

$\{X=16\}$: « سحب 3 كرات جداء أعدادها هو 16 »

$$\{X=16\} : (4 \text{ و } 2 \text{ و } 2)$$

ومنه :

$$\text{card}[X=16] = C_1^1 \times C_4^2 = 6$$

إذن :

$$P[X=16] = \frac{\text{card}[X=16]}{\text{card}(\Omega)}$$

$$\boxed{P[X=16] = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}}$$

ب- لدينا : $P[X=0]$

ط1 :

$\{X=0\}$: « سحب 3 كرات جداء أعدادها هو 0 »

$$\{X=0\} : (0 \text{ و } 0 \text{ و } \overline{0}) \text{ أو } (0 \text{ و } \overline{0} \text{ و } \overline{0})$$

ومنه :

$$\text{card}[X=0] = C_2^2 \times C_6^1 + C_2^1 \times C_6^2 = 6 + 30 = 36$$

ومنه

$$P[X=0] = \frac{\text{card}[X=0]}{\text{card}(\Omega)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P[X=0] = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}}$$

JAMATH

ط2 : (الحدث المضاد)

$\{X=0\}$: « سحب كرات جداء أعدادها هو 0 »

$\overline{\{X=0\}}$: « سحب كرات جداء أعدادها غير منعدم »

$\overline{\{X=0\}}$: « عدم سحب 0 » : A

ومنه :

$$P[X=0] = 1 - P[\overline{X=0}]$$
$$= 1 - P(A)$$
$$= 1 - \frac{5}{14}$$

ومنه

$$\boxed{P[X=0] = \frac{9}{14}}$$

• لدينا : $P[X=4]$

$\{X=4\}$: « سحب كرات جداء أعدادها هو 4 »

$\{X=4\}$: (2 و 2 و 1)

$$card[X=4] = C_4^2 \times C_1^1 = 6$$

ومنه

$$P[X=4] = \frac{card[X=4]}{card(\Omega)} = \frac{6}{56}$$

أي :

$$\boxed{P[X=4] = \frac{3}{28}}$$

• لدينا : $P[X=8]$

$\{X=8\}$: « سحب 3 كرات جداء أعدادها هو 8 »

$\{X=8\}$: الحدث B

ومنه

$$P[X=8] = P(B)$$

أي

$$P[X=8] = \frac{1}{7}$$

إذن :

$$P[X=0] = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$$
$$P[X=4] = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$
$$P[X=8] = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$
$$P[X=16] = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

وبما أن $\sum_{X(\Omega)} P[X=i]$

$$= \frac{36}{56} + \frac{6}{56} + \frac{8}{56} + \frac{6}{56}$$
$$= \frac{56}{56} = 1$$

فإن $X(\Omega) = \{0; 4; 8; 16\}$

ومنه جدول قانون المتغير العشوائي X هو :

x_i	0	4	8	16
$P[X=x_i]$	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$

JAMATH

التمرين الثالث :

JAMATH

1) أ- لدينا :

$$b = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i$$

ولدينا : $(1+i) \times a$

$$= (1+i)(\sqrt{3}+i)$$
$$= \sqrt{3} + i + i\sqrt{3} + i^2$$
$$= \sqrt{3} + i^2 + i(1+\sqrt{3})$$
$$= (\sqrt{3} - 1) + (1+\sqrt{3})i$$

ومنه

$$\boxed{b = (1+i) \times a}$$

ب- لنبين أن $|b| = 2\sqrt{2}$

ط1 : لدينا :

$$b = (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i$$

ومنه

$$|b| = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2}$$
$$= \sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 1}$$
$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

ط2 : لدينا :

$$b = (1+i) \times a$$

ومنه $|b| = |1+i| \times |a|$

ولدينا : $|1+i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$$|a| = |\sqrt{3} + i|$$
$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2}$$
$$= 2$$

ومنه $|b| = \sqrt{2} \times 2$

إذن $\boxed{|b| = 2\sqrt{2}}$

III-1

ج- لدينا :

$$b = (1+i) \times a$$

ومنه $Arg(b) \equiv Arg[(1+i) \times a]\ [2\pi]$

$$\equiv Arg(1+i) + Arg(a)\ [2\pi]$$

ولدينا :

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \left[\sqrt{2} ; \frac{\pi}{4}\right]$$

وكذلك :

$$a = \sqrt{3} + i$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \left[2 ; \frac{\pi}{6}\right]$$

ومنه

$$Arg(b) \equiv Arg(1+i) + Arg(a)\ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{4+6}{24}\pi\ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{10\pi}{24}\ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$$

إذن

$$\boxed{Arg(b) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]}$$

ملاحظة :

لا يمكن تحديد $Arg(b)$ مباشرة إعتمادا على كتابة المثلثية لـ b لأن $\frac{5\pi}{12}$ غير إعتيادية .

2) أ- • لدينا: $c = -1 + i\sqrt{3}$

لدينا: $i \times a$

$= i \times (\sqrt{3} + i)$

$= i\sqrt{3} + i^2 = -1 + i\sqrt{3}$

ومنه:

$$\boxed{c = i\,a}$$

• لدينا:

ط1

$$c = i\,a$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a} = i$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} = i$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_{\overrightarrow{OC}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} = i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \dfrac{z_{\overrightarrow{OC}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} \right| = |i| \\ Arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{OC}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}\right) \equiv Arg(i)\ [2\pi] \end{cases}$$

III . 2

ونعلم أن:

$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow i = \left[1 ; \frac{\pi}{2}\right]$$

ونعلم أيضا أن:

$$\left| \frac{z_{\overrightarrow{OC}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} \right| = \frac{OC}{OA}$$

و

$$Arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OC}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}\right) \equiv \overline{(\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OC})}\ [2\pi]$$

ومنه نستنتج أن:

$$\begin{cases} \dfrac{OC}{OA} = 1 \\ \overline{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} OA = OC \\ \overline{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}}$$

ج- لنبين أن $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

ط1 لدينا:

$$\begin{cases} |b| = 2\sqrt{2} \\ Arg(b) \equiv \dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi] \end{cases}$$

ومنه:

$$\cos(Arg(b)) = \frac{Re(b)}{|b|}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$

ط2: باستعمال قاعدة الكتابة المثلثية للعدد العقدي b فإن:

$$b = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)\,i$$

$$\Leftrightarrow b = 2\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}\,i\right]$$

ومنه:

إذا كان $\alpha \equiv Arg(b)\ [2\pi]$

فإن:

$$b = 2\sqrt{2}\left[\cos\alpha + i\sin\alpha\right]$$

ومنه:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

وحسب السؤال (1-ب) فإن

$$Arg(b) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$$

إذن:

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

أي

$$\boxed{\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$

JAMATH

2b :

• لدينا : $c = i\,a$

$\Leftrightarrow |c| = |i \times a|$

$\Leftrightarrow |c| = |i| \times |a|$

$\Leftrightarrow \boxed{OC = 1 \times OA}$

(تذكر أن $|z| = OM$ حيث z لحق النقطة M)

• لدينا : $c = i \times a$

$\Leftrightarrow Arg(c) \equiv Arg(i \times a) \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow Arg(c) \equiv Arg(i) + Arg(a) \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow Arg(c) - Arg(a) \equiv Arg(i) \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \overline{(\vec{u}, \vec{OC})} - \overline{(\vec{u}, \vec{OA})} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \underbrace{\overline{(\vec{OA}, \vec{u})} + \overline{(\vec{u}, \vec{OC})}}_{\text{شال}} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \boxed{\overline{(\vec{OA} ; \vec{OC})} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]}$

III 3

ب - إذا كانت B هي صورة A بإزاحة ذات المتجهة $\vec{OC}$ فإن

$\vec{AB} = \vec{OC}$

أي $z_{\vec{AB}} = z_{\vec{OC}}$

لنبين ذلك :

$$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$$
$$= (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i - [\sqrt{3}+i]$$
$$= (\sqrt{3}-1) - \sqrt{3} + (\sqrt{3}+1)i - i$$
$$= -1 + \sqrt{3}\,i$$

و $z_{\vec{OC}} = z_C - z_O$
$$= -1 + \sqrt{3}\,i - (0 + 0i)$$

ومنه :

$$z_{\vec{AB}} = z_{\vec{OC}}$$

إذن :

$$T_{\vec{OC}}(A) = B$$

أي :

B هي صورة A بإزاحة T التي متجهتها هي $\vec{OC}$

JAMATH

ج. لدينا :

• حسب السؤال (ب)

$T_{\vec{OC}}(A) = B$

$\Leftrightarrow \vec{OC} = \vec{AB}$

ومنه

$$\begin{cases} (OC) \parallel (AB) \\ OC = AB \end{cases}$$

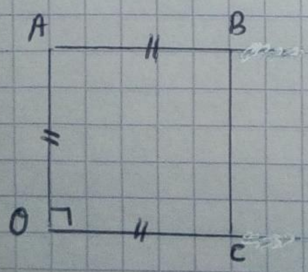
• حسب السؤال (أ)

$$\begin{cases} OA = OC \\ \overline{(\vec{OA}, \vec{OC})} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OA = OC \\ A\hat{O}C = 90^\circ \end{cases}$$

• ومنه :

$$\begin{cases} (OC) \parallel (AB) \\ OC = OA = AB \\ A\hat{O}C = 90^\circ \end{cases}$$



ومنه : $OABC$ عبارة عن مربع

تصحيح الإمتحان الوطني 2017 الرياضيات

المسألة :

I)

1- • لدينا : $D_g =]0,+\infty[$

ومنه $1 \in D_g$

إذن : $g(1) = (1)^2 + (1) - 2 + 2\ln(1)$

$\Rightarrow g(1) = 0$

لأن $\ln(1) = 0$

2- • لدينا : (الإتصال شرط أساسي)

$x \mapsto x^2+x-2$ دالة حدودية متصلة على D_g

$x \mapsto 2\ln(x)$ دالة إعتيادية ،، ،، D_g

ومنه g دالة متصلة على مجموعة تعريفها

ط1 • لدينا :

في المجال $]0,1]$ الدالة g تزايدية قطعاً ومنه : (تحافظ على الترتيب)

$\forall x \in]0,1]$;

$0 < x \leq 1 \implies g(x) \leq g(1)$

$\implies g(x) \leq 0$

• لدينا :

في المجال $[1,+\infty[$ الدالة g تزايدية قطعا ومنه ؛ (تحافظ على الترتيب)

$\forall x \in [1,+\infty[$

$x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1)$

$\Rightarrow g(x) \geq 0$

إذن :

g سالبة لكل x من المجال $]0,1]$
g موجبة لكل x من المجال $[1,+\infty[$

ط2 :

بما أن g تزايدية قطعا ومتصلة على المجال $]0,+\infty[$ فإن :

• $g(]0,1]) =]\lim\limits_{0^+} g(x), g(1)]$

$=]-\infty, 0]$

ومنه :

$\boxed{g(x) \leq 0 \quad \text{لكل } x \text{ من }]0,1]}$

• $g([1,+\infty[) = [g(1) ; \lim\limits_{+\infty} g(x)[$

$= [0, +\infty[$

ومنه :

$\boxed{g(x) \geq 0 \quad \text{لكل } x \text{ من } [1,+\infty[}$

II)

1- • لدينا : $\lim\limits_{0^+} f(x)$

$= \lim\limits_{0^+} x + (1-\frac{2}{x})\ln(x)$

$= \left[\lim\limits_{0^+} x\right] + \left[\lim\limits_{0^+} (1-\frac{2}{x})\right] \times \left[\lim\limits_{0^+} \ln(x)\right]$

$= +\infty$

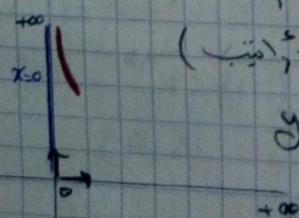
لأن :
- • $\lim\limits_{0^+} \ln(x) = -\infty$
- • $\lim\limits_{0^+} \frac{2}{x} = +\infty$
- • $\lim\limits_{0^+} (1-\frac{2}{x}) = -\infty$

• لدينا :

$\lim\limits_{0^+} f(x) = +\infty$

إذن C_f يقبل فرعاً لا نهائياً بمقارب من بين المستقيم المقارب العمودي $x=0$ (محور الأراتيب)

بجوار $y = +\infty$



أ) ج- لدينا: $\lim\limits_{+\infty} f(x)$

$= \lim\limits_{+\infty} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln(x)$

$= +\infty + \left(1 - \frac{2}{+\infty}\right) \ln(+\infty)$

$= +\infty + (1 - 0^+)(+\infty)$

$= +\infty + \infty$

$= +\infty$

حساب ذهني

لأن:

- $\lim\limits_{+\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{+\infty} \frac{2}{x} = 0^+$

ب)

ط1: • لدينا: $f(x) - y$

$= x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln(x) - x$

$= \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln(x)$

• ولدينا: $\lim\limits_{+\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln(x)$

$= 1 \times +\infty$

$= +\infty$

• ومنه:

بما أن $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} f(x) - y = +\infty \end{cases}$

فإن C_f يقبل فرعا لانهائيا شلجميا في اتجاه المستقيم المائل $y = x$.

بجوار $x = +\infty$ و $y = +\infty$

ط2:

• لدينا: $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

ومنه نحسب

$\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$

• لدينا: $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x}\left(x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{x}{x} + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \frac{\ln(x)}{x}$

$= 1$.

لأن:

- $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{+\infty} \frac{2}{x} = 0$

ومنه بما أن $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$

نحسب $\lim\limits_{+\infty} f(x) - ax$

• لدينا: $\lim\limits_{+\infty} f(x) - ax$

$= \lim\limits_{+\infty} f(x) - x$

$= +\infty$ (أنظر ط1)

• إستنتاج: $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{+\infty} f(x) - ax = +\infty \end{cases}$

إذن C_f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم $y = ax$

أي $y = x$

3) أ-

• لدينا:

$x \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ (دالة حدودية)

$x \mapsto 1 - \frac{2}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ (دالة جذرية)

$x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ (الدالة إعتيادية)

ومنه:

f تقبل الاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها جداء ومجموع دوال قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

10

• لدينا :

$\forall x \in]0,+\infty[$

$$f'(x) = \left(x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x\right)'$$
$$= (x)' + \left[\left(1 - \frac{2}{x}\right)\times \ln x\right]'$$
$$= 1 + \left(1 - \frac{2}{x}\right)'\ln(x) + \left(1 - \frac{2}{x}\right)(\ln(x))'$$
$$= 1 + \left(\frac{2}{x^2}\right)\ln(x) + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\frac{1}{x}$$
$$= 1 + \frac{2\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$$
$$= \frac{x^2 + 2\ln(x) + x - 2}{x^2}$$
$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

ب) • لدينا :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

وبما أن x^2 موجب قطعا

فإن إشارة f' هي نفس إشارة g

• ومنه :

لكل x من المجال $]0,1]$

$g(x) \leq 0$ (حسب I.2)

ومنه g سالبة ~~قطعا~~

أي f' سالبة ~~قطعا~~

إذن f تناقصية ~~قطعا~~

• وأيضا :

لكل x من المجال $[1,+\infty[$

$g(x) \geq 0$ حسب (I.2)

ومنه g موجبة

أي f' موجبة

إذن f تزايدية

• إذن :

f تناقصية على $]0,1]$
f تزايدية على $[1,+\infty[$

ج- لدينا :

• $f(1) = (1) + \left(1 - \frac{2}{(1)}\right)\ln(1)$
$= 1$

• $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

• $\lim_{0^+} f(x) = +\infty$

ومنه :

x	0		1		$+\infty$
تغايرات f	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4- أ) • لدينا : $\forall x \in]0;+\infty[$

$$\left(1 - \frac{2}{x}\right)\times \ln(x) = 0$$
$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x} = 0$ أو $\ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{2}{x}$ أو $x = 1$

$\Leftrightarrow x = 2$ أو $x = 1$

ومنه

$$\boxed{S = \{1;2\}}$$

ب) • لدينا :

لتحديد تقاطع C_f مع (D)

يجب حل المعادلة $f(x) = y$

ومنه $f(x) = y$

$\Leftrightarrow f(x) - y = 0$

$\Leftrightarrow f(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ أو $x = 2$

ومنه C_f و (D) يتقاطعان

في النقطتين $(1;f(1))$ و $(2;f(2))$

أي $(1;1)$ و $(2;2)$

ج) • لدينا :

$$f(x) - x = \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln(x)$$

ومنه لكل x من المجال $[1,2]$

$$1 \leq x \leq 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{1}$$
$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{2}{x} \leq 2$$
$$\Leftrightarrow -2 \leq -\frac{2}{x} \leq -1$$
$$\Leftrightarrow -1 \leq 1 - \frac{2}{x} \leq 0$$

أي $\left(1 - \frac{2}{x}\right)$ سالبة

ونعلم أن

$$x \geq 1 \Rightarrow \ln(x) \geq 0$$

إذن :

$$\forall x \in [1,2] \quad \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln(x) \leq 0$$

أي :

$$\forall x \in [1;2] \quad f(x) - x \leq 0$$

وبما أن $f(x) \leq x$

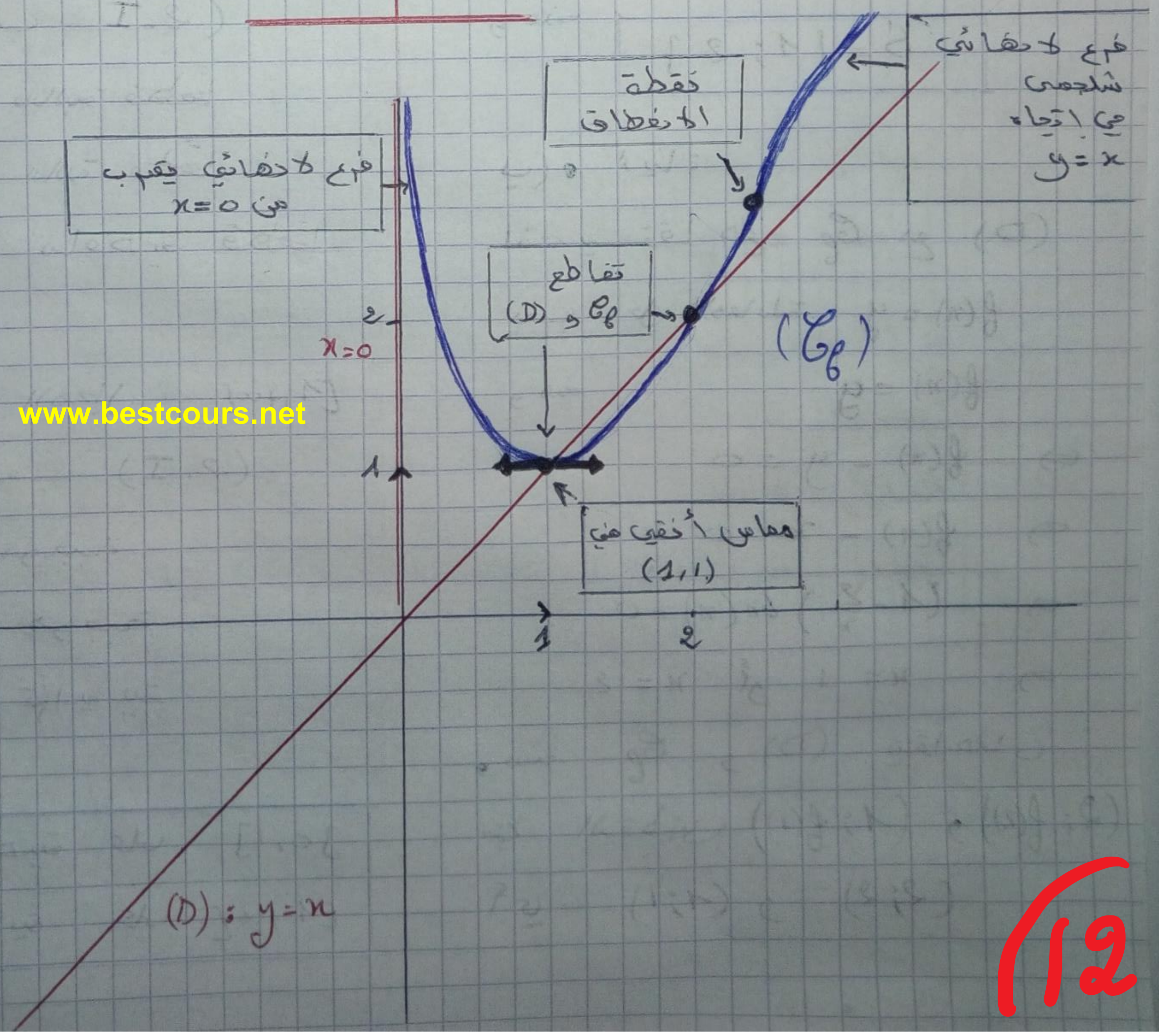
في المجال $[1,2]$

فهذا يعني أن منحنى الدالة

f يوجد أسفل المستقيم

$(D): y = x$ في المجال $[1;2]$.

$f(2,5) \simeq 2,7$



6) أ- • لدينا :

$x \mapsto \ln(x)$ دالة معرفة ومتصلة على $[1,2]$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ دالة معرفة ومتصلة على $[1,2]$

ومنه : $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ دالة متصلة على $[1,2]$ إذن فهي تقبل مجموعة دوال أصلية

• لدينا :

$$\frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} \times \ln(x)$$
$$= (\ln(x))' \times \ln(x)$$
$$= \frac{1}{2}\, 2(\ln(x))' \ln(x)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln^2(x)\right)'$$

• ومنه:

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\, dx = \left[\frac{1}{2} \ln^2(x)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln^2(2) - \frac{1}{2}\ln^2(1) = \frac{1}{2}\ln^2(2)$$

إذن:

$$\boxed{\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\, dx = \frac{1}{2}\ln^2(2)}$$

ب- لدينا:

$x \mapsto 2\ln(x)$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

$x \mapsto -x$ " " " "

ومنه:

تقبل الاشتقاق $H : x \mapsto 2\ln(x) - x$ على $\mathbb{R}_+$ ومنه:

$$H'(x) = 2(\ln(x))' - (x)'$$
$$= \frac{2}{x} - 1$$

• ومنه:

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad H'(x) = h(x)$$

إذن

الدالة H دالة أصلية للدالة h على $]0,+\infty[$

ج- إذا قمنا بوضع:

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \frac{2}{x} - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = 2\ln(x) - x \end{cases}$$

فإن:

u و v متصلتان وقابلتان للاشتقاق و u' و v' متصلتان على $\mathbb{R}_+^*$

ومنه:

$$\int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln(x)\, dx$$
$$= \left[\ln(x)\left(2\ln(x) - x\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\left(2\ln(x) - x\right)dx$$
$$= \left[\ln(x)\left(2\ln(x) - x\right)\right]_1^2 - 2\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx + \int_1^2 \frac{x}{x}dx$$
$$= 2\ln^2(2) - 2\ln(2) - 2 \times \frac{1}{2}\ln^2(2) + [x]_1^2$$
$$= 2\ln^2(2) - 2\ln(2) - \ln^2(2) + 1$$
$$= \ln^2(2) - 2\ln(2) + 1$$
$$= (\ln(2) + 1)^2$$
$$= (1 + \ln(2))^2$$

ومنه:

$$\boxed{\int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x\, dx = (1 + \ln(2))^2}$$

د- • لدينا:

وحدة حساب المساحة هي

$$U.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

$$\Leftrightarrow U.A = 1\,cm \times 1\,cm$$

$$\Leftrightarrow \boxed{U.A = 1\,cm^2}$$

• لدينا:

مساحة الحيز المحصور بين $x=1$ و $x=2$ و C_f و المستقيم $(D): y=x$ هي

$$\mathcal{A} = \left(\int_1^2 |f - y|\, dx\right) U.A$$

ونعلم أن:

$$f - y = f(x) - x$$

• لدينا:

في المجال $[1;2]$ $f(x) \leq x$ حسب (ج-4-I)

ومنه:

$f(x) - x \leq 0$ سالبة

إذن

$$\boxed{|f-y| = y-f}$$

• ومنه:

مساحة الحيز هي:

$$\mathcal{A} = \left(\int_1^2 x - f(x)\, dx\right) \times U.A$$

$$= \left(\int_1^2 -\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln(x)\, dx\right) \times U.A$$

$$= \left(\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right)\ln(x)\, dx\right) \times U.A$$

$$= (1-\ln(2))^2 \times 1\,cm^2$$

III ← 1

A) لدينا:

$$\begin{cases} U_{n+1} = f(U_n) \\ U_0 = \sqrt{3} \end{cases}$$

لنبين بالتراجع أن:

$1 \leq U_n \leq 2$ لكل n من $\mathbb{N}$

التحقق:

- من أجل $n=0$ لدينا:

$$U_0 = \sqrt{3}$$

أي $1 \leq U_0 \leq 2$

علاقة التراجع:

- لنفترض أن $1 \leq U_n \leq 2$

ولنبين أن $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

- إذا كانت:

$$1 \leq U_n \leq 2$$

فإنه حسب (II) f دالة معرفة وتزايدية على $[1,2]$ ومنه

$$1 \leq U_n \leq 2$$

$$\Rightarrow f(1) \leq f(U_n) \leq f(2)$$

$$\Rightarrow 1 \leq f(U_n) \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq U_{n+1} \leq 2$$

لأن: $f(1) = 1$

$f(2) = 2$

الاستنتاج:

حسب التحقق وعلاقة التراجع نستنتج أن

$1 \leq U_n \leq 2$ لكل n من $\mathbb{N}$

• لدينا : (حسب II-4-ج)

$\forall x \in [1,2] \quad f(x) - x \leq 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in [1,2] \quad f(x) \leq x$

و بما أن :

$1 \leq U_n \leq 2$

فإن $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \in [1,2]$

ومنه :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(U_n) \leq U_n$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} \leq U_n$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} - U_n \leq 0$

إذن :

$\boxed{U_n \text{ متتالية تناقصية}}$

3) • لدينا :

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq U_n \leq 2$
- U_n تناقصية
- متقاربة لأنها تناقصية ومصغورة بالعدد 1 أي

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$

بحيث $1 \leq \ell \leq 2$

• لدينا :

- f دالة متصلة على $\mathbb{R}_+^*$
- وبالأخص على $[1,2]$
- لدينا :

$f([1,2]) = [f(1), f(2)]$

$= [1; 2]$

لأن f تزايدية قطعا على $[1;2]$

• إذن : نهاية المتتالية

$U_{n+1} = f(U_n)$

هي حل المعادلة

$f(\ell) = \ell$

• حسب السؤال II-4-ب

فإن حلول المعادلة

$f(x) = x$

هي $x = 1$ أو $x = 2$

إذن :

$\ell = \lim_{+\infty} U_n = 1$

أو

$\ell = \lim_{+\infty} U_n = 2$

وبما أن U_n متتالية تناقصية

فإن لكل n من $\mathbb{N}$:

$U_n \leq U_0$

$\Leftrightarrow U_n \leq \sqrt{3}$

إذن :

$\lim_{+\infty} U_n \leq \sqrt{3} \simeq 1,7$

إذن :

$\lim_{+\infty} U_n = 1$

ومنه نهاية المتتالية U_n

تساوي 1