المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- الموضوع -

NS 22

| | | | |
|---|---|---|---|
| المادة | الرياضيات | مدة الإنجاز | 3 |
| الشعبة أو المسلك | شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها | المعامل | 7 |

## تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات ومكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان) ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

## مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين ومسألة ، مستقلة فيما بينها ، وتتوزع حسب المجالات كما يلي :

| | | |
|---|---|---|
| التمرين الأول | الهندسة الفضائية | 3 نقط |
| التمرين الثاني | الأعداد العقدية | 3 نقط |
| التمرين الثالث | حساب الاحتمالات | 3 نقط |
| المسألة | دراسة دالة عددية و حساب التكامل والمتتاليات العددية | 11 نقطة |

- بالنسبة للمسألة ، ln يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري

**التمرين الأول : ( 3 ن )**

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقطتين $A(2,1,0)$ و $B(-4,1,0)$

0.5 (1 ليكن $(P)$ المستوى المار من النقطة $A$ و $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ متجهة منظمية عليه .

بين أن $x+y-z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $(P)$

0.75 (2 لتكن $(S)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

بين أن $(S)$ هي الفلكة التي مركزها النقطة $\Omega(-1,1,0)$ و شعاعها 3

0.5 (3 أ- احسب مسافة النقطة $\Omega$ عن المستوى $(P)$ ثم استنتج أن $(P)$ يقطع $(S)$ وفق دائرة $(C)$

0.5 ب- بين أن مركز الدائرة $(C)$ هو النقطة $H(0,2,-1)$

0.75 (4 بين أن $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$ ثم استنتج مساحة المثلث $OHB$

**التمرين الثاني : ( 3 ن )**

I- نعتبر العدد العقدي $a$ بحيث $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

0.5 (1 بين أن معيار العدد العقدي $a$ هو $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

0.25 (2 تحقق من أن $a=2\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)+2i\sin\dfrac{\pi}{4}$

0.25 (3 أ- بإخطاط $\cos^2\theta$ ، حيث $\theta$ عدد حقيقي ، بين أن $1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$

0.5 ب- بين أن $a=4\cos^2\dfrac{\pi}{8}+4i\cos\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8}$ ( نذكر أن $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$ )

0.5 ج- بين أن $4\cos\dfrac{\pi}{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$ هو شكل مثلثي للعدد $a$ ثم بين أن $a^4=\left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$

II- نعتبر،في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$، النقطتين $\Omega$ و $A$ اللتين لحقاهما على التوالي هما $\omega$ و $a$ بحيث $\omega=\sqrt{2}$ و $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $R$ الدوران الذي مركزه $\Omega$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

0.5 (1 بين أن اللحق $b$ للنقطة $B$ صورة النقطة $A$ بالدوران $R$ هو $2i$

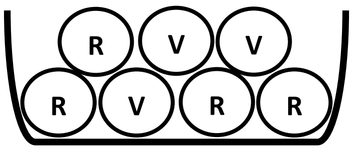
0.5 (2 حدد مجموعة النقط $M$ ذات اللحق $z$ بحيث $|z-2i|=2$

**التمرين الثالث : ( 3 ن )**

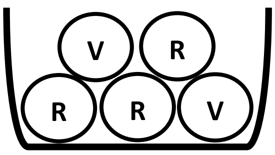
يحتوي صندوق $U_1$ على 7 كرات : أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء ( لا يمكن التمييز بينها باللمس )

و يحتوي صندوق $U_2$ على 5 كرات : ثلاث كرات حمراء و كرتان خضراوان ( لا يمكن التمييز بينها باللمس )

الصندوق $U_1$




الصندوق $U_2$




2 (I نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق $U_1$

ليكن $A$ الحدث : " الحصول على كرة حمراء واحدة و كرتين خضراوين ".

و $B$ الحدث : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون " .

بين أن $p(A)=\dfrac{12}{35}$ و $p(B)=\dfrac{1}{7}$

1 (II نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من $U_1$ ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من $U_2$

ليكن $C$ الحدث : "الحصول على ثلاث كرات حمراء ".

بين أن ... 6

**المسألة : ( 11 ن )**

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ بحيث : $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

و ليكن $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( الوحدة : 2 cm )

**I) 1)** بين أن $D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$ ( $D_f$ هي مجموعة تعريف الدالة $f$ ) 0.5

**2)** أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f(x)$ و أول هندسيا النتيجتين المتوصل إليهما . 0.75

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم استنتج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مقاربا بجوار $+\infty$ يتم تحديده . 0.5

ج- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة ( لحساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ لاحظ أن $x(1-\ln x)=x-x\ln x$ ) 0.5

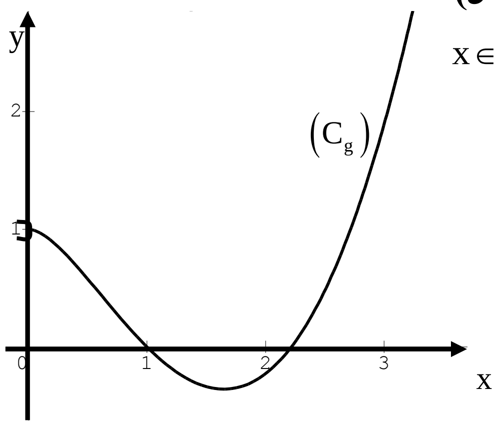
**3)** أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل $x$ من $D_f$ 0.75

ب- بين أن الدالة $f$ تناقصية على المجال $]0,1]$ و تزايدية على كل من المجالين $[1,e[$ و $]e,+\infty[$ 1

ج- ضع جدول تغيرات الدالة $f$ على $D_f$ 0.25

**II)** لتكن $g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$

و ليكن $(C_g)$ المنحنى الممثل للدالة $g$ في معلم متعامد ممنظم (انظر الشكل)




**1)** أ- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $(E)$ التالية : $g(x)=0$ , $x\in]0,+\infty[$ 0.5

ب- نعطي جدول القيم التالي : 0.5

| x | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 |
|---|---|---|---|---|
| g(x) | −0,14 | −0,02 | 0,12 | 0,28 |

بين أن المعادلة $(E)$ تقبل حلا $\alpha$ بحيث $2,2<\alpha<2,3$

**2)** أ- تحقق من أن $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ لكل $x$ من $D_f$ 0.25

ب- بين أن المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى $(C_f)$ في النقطتين اللتين أفصولاهما 1 و $\alpha$ 0.5

ج- حدد ، انطلاقا من $(C_g)$، إشارة الدالة $g$ على المجال $[1,\alpha]$ و بين أن $f(x)-x\le 0$ لكل $x$ من $[1,\alpha]$ 0.5

**3)** أنشئ ، في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$ 1.25

**4)** أ- بين أن $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x(1-\ln x)}dx=\ln 2$ ( لاحظ أن : $\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ لكل $x$ من $D_f$ ) 0.75

ب- احسب ، ب $cm^2$، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ و المستقيمين الذين معادلتاهما $x=1$ و $x=\sqrt{e}$ 0.75

**III)** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

**1)** بين بالترجع أن $1\le u_n\le\alpha$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ 0.5

**2)** بين أن المتتالية $(u_n)$ تناقصية ( يمكن استعمال نتيجة السؤال II) 2) ج- ) 0.5

**3)** استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة و حدد نهايتها . 0.75

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
## الدورة العادية 2015
## - عناصر الإجابة -

NR 22

| | | | |
|---|---|---|---|
| المادة | الرياضيات | مدة الإنجاز | 3 |
| الشعبة أو المسلك | شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها | المعامل | 7 |

**تؤخذ بعين الاعتبار مختلف مراحل الحل وتقبل كل طريقة صحيحة تؤدي إلى الحل**

**التمرين الأول ( 3 ن )**

| | | |
|---|---|---|
| 0.5 | (1 | 0.5 |
| 0.75 | (2 | 0.25 ل $(S)$ فلكة (الفلكة التي أحد أقطارها $[AB]$ أو اعتبار $M(x,y,z)$ والتوصل إلى المعادلة $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=9$ ) و 0.25 للمركز و 0.25 للشعاع |
| 1 | (3 | أ- 0.25 ل $d(\Omega,(P))=\sqrt{3}$ و 0.25 ل $d(\Omega,(P))<3$ ب - 0.5 |
| 0.75 | (4 | 0.5 لتحديد $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}$ و 0.25 لمساحة المثلث هي $\frac{9}{2}$ |

**التمرين الثاني ( 3 ن )**

| | | |
|---|---|---|
| 0.5 | (1-I | 0.25 ل $\lvert a\rvert=\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$ و 0.25 للحساب |
| 0.25 | (2 | 0.25 |
| 1.25 | (3 | أ-0.25 ب-0.5 ( 0.25 ل $1+\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}$ و 0.25 ل $\sin\frac{\pi}{4}=2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$ ) ج- 0.5 ( 0.25 ل $\cos\frac{\pi}{8}>0$ و 0.25 للمتساوية $a^4=\left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$ ) |
| 0.5 | (1-II | 0.25 للكتابة $b-\omega=i(a-\omega)$ و 0.25 للتوصل إلى أن $b=2i$ |
| 0.5 | (2 | 0.25 ( لترجمة $\lvert z-2i\rvert=2$ إلى $BM=2$ أو اعتبار $z=x+iy$ و التوصل إلى المعادلة $x^2+(y-2)^2=4$ ) و 0.25 للمجموعة هي الدائرة التي مركزها $B$ و شعاعها $2$ |

**التمرين الثالث ( 3 ن )**

| | | |
|---|---|---|
| 2 | (I | 1 للتوصل إلى أن $p(A)=\frac{12}{35}$ و 1 للتوصل إلى أن $p(B)=\frac{1}{7}$ |
| 1 | (II | 1 للتوصل إلى أن $p(C)=\frac{6}{35}$ |

المسألة ( 11 ن )

| | | |
|---|---|---|
| 0.5 | I-1) | 0.5 |
| 1.75 | 2) | أ- 0.25 لكل نهاية من النهايتين و 0.25 للتأويل ب- 0.25 للتوصل إلى $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و 0.25 للاستنتاج<br>ج- 0.25 للنهاية و 0.25 للتأويل |
| 2 | 3) | أ- 0.75 ب- 0.25 ل $f'(x)\le 0$ لكل $x$ من $]0,1]$ و 0.25 ل $f$ تناقصية على $]0,1]$<br>و 0.25 ل $f'(x)\ge 0$ لكل $x$ من $]1,e[\cup]e,+\infty[$ و 0.25 ل $f$ تزايدية على كل من المجالين $[1,e[$ و $]e,+\infty[$<br>ج- 0.25 |
| 1 | II-1) | أ- 0.5 ب- 0.25 ل $g$ متصلة على المجال $[2,2\ ,\ 2,3]$ و 0.25 ل $g(2,2)\times g(2,3)<0$ |
| 1.25 | 2) | أ- 0.25 ب- 0.5<br>ج- 0.25 لإشارة $g$ على المجال $[1,\alpha]$ و 0.25 ل $x(1-\ln x)>0$ لكل $x$ من $[1,\alpha]$ |
| 1.25 | 3) | انظر الشكل أسفله |
| 1.5 | 4) | أ- 0.5 لتحديد دالة أصلية و 0.25 للنتيجة ب- 0.5 للمساحة ب $cm^2$ هي $4\times\int_1^{\sqrt{e}}(x-f(x))dx$<br>و 0.25 للتوصل إلى أن المساحة هي $2(e-1-2\ln 2)\ cm^2$ |
| 0.5 | III)-1) | 0.5 |
| 0.5 | 2) | 0.5 |
| 0.75 | 3) | 0.25 للمتتالية $(u_n)$ متقاربة ( تناقصية و مصغورة ) و 0.25 ل ( التأكيد على أن $f$ متصلة على $[1,\alpha]$<br>و أن $f([1,\alpha])\subset[1,\alpha]$ ) و 0.25 لنهاية المتتالية هي 1 |